

7 Obserwowalność i identyfikacja modów nieradialnych w gwiazdach

Dla gwiazd znamy tylko uśrednione po tarczy charakterystryki modów oscylacji. Prowadzi to do ograniczeń w obserwowalności modów oscylacji wynikających z efektów uśrednienia i aspektu. Empiryczne wyznaczenie sferycznego harmonika modów związanych z częstotliwościami w widmach oscylacji stanowi istotny element analizy danych, który jest co najmniej pomocny w identyfikacji modów.

7.1 Funkcje własne w atmosferze

Pominiemy tu zmiany funkcji własnych wewnątrz atmosfery, przyjmujemy też że w czasie oscylacji atmosfera znajduje się w stanach chwilowej równowagi cieplnej. Te przybliżenia są uzasadnione, dla modów o względnie niskich częstotliwościach, na przykład takich jakich wzbudzone są w gwiazdach typu δ Scuti czy β Cephei.

Będziemy korzystać z liniowej teorii oscylacji nieadiabatycznych. Efekty nieliniowe są w interesujących nas zastosowaniach niewielkie.

Lokalną zmianę odległości fotosfery od centrum gwiazdy, związaną z modem oscylacji, opisuje wzór:

$$\delta R \equiv \xi_r = R \Re[\epsilon Y_\ell^m \exp(-i\omega t)], \quad (7.1)$$

w którym ϵ jest dowolną, byle tylko odpowiednio małą, wielkością zespoloną. Teoria liniowa wyznacza jedynie względne amplitudy i różnice faz różnych parametrów opisujących zmienność gwiazdy.

Przy zaniedbaniu rotacji, z (7.1) wynikają następujące wyrażenie na składową radialną prędkości:

$$v_r = R\omega \Im[\epsilon Y_\ell^m \exp(-i\omega t)]. \quad (7.2)$$

Skąd i z (5.27) można dostać wzór na składowe horyzontalne i ostatecznie na pole prędkości mamy

$$\mathbf{v}_H = \alpha_H \nabla_H v_r, \quad (7.3)$$

gdzie

$$\alpha_H = \frac{1}{3\sigma^2} = \frac{GM}{R^3\omega^2} \quad (7.4)$$

Zmiana składowej normalnej strumienia promieniowania, F_n , którą w przybliżeniu liniowym jest równa składowej radialnej, dana jest przez

$$\frac{4\pi R^2 \delta F_n}{L} = 4 \frac{\delta T_{\text{eff}}}{T_{\text{eff}}} = \Re[\epsilon f Y_\ell^m \exp(-i\omega t)]. \quad (7.5)$$

Zespoloną wielkość f można wyznaczyć drogą obliczeń nieadiabatycznych dla odpowiednich modeli gwiazd. Porównując wyrażenia (7.15) i (5.14) widzimy, że zachodzi $f = y_6(R) - 2$.

Wartość f można także wyznaczyć pół-empirycznie wykorzystując pomiary w wielu pasmach fotometrycznych. Można ją wtedy wykorzystać jako niezależne sejsmiczne ograniczenie na model gwiazdy (dokładnie jej zewnętrznych), o czym będzie jeszcze mowa.

W przybliżeniu quadiabatycznym, z którego można korzystać jedynie do oceny rzędu wielkości, dostajemy z warunku brzegowego (5.28),

$$f = 4\nabla_{\text{ad}} \frac{\delta p}{p} \left(\frac{\delta R}{R} \right)^{-1} = -4\nabla_{\text{ad}} \left(4 + 3\sigma^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{3\sigma^2} \right) \quad (7.6)$$

Z tego wzoru wynika ważny wniosek, że dla wysokich rzędów zarówno modów p ($\sigma \gg 1$) jak i g ($\sigma \ll 1$) mamy $f \gg 1$. co oznacza że zmiany temperatury są głównym źródłem zmian jasności gwiazdy.

Dla wyliczenia wielkości obserwowalnych wygodnie jest przejść do układu współrzędnych sferycznych (r, θ', ϕ') , w którym oś biegunowa jest skierowana ku obserwatorowi. Sferyczne harmoniki transformują się według wzoru

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = \sum_{m'=-\ell}^{\ell} d_{mm'}^\ell(\theta_O, \phi_O) Y_\ell^{m'}(\theta', \phi'), \quad (7.7)$$

w którym współczynniki $d_{mm'}^\ell$, zależą od kątów wyznaczających kierunek do obserwatora. Całkowanie po dysku przeżyje tylko składnik $m' = 0$, dla którego mamy

$$d_{m,0}^\ell = Y_\ell^m(\theta_O, \phi_O) \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}, \quad (7.8)$$

gdzie, z uwzględnieniem rotacji gwiazdy, $\phi_O = \phi_{O,0} + \Omega t$. Modulacja amplitudy związana z rotacją nie będzie istotna więc, dla wygody, w dalszych rozważaniach przyjmujemy $\phi_O = 0$. Z (1.4) wynika

$$Y_\ell^0(\theta') \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} = P_\ell(\cos \theta'),$$

a zatem wyliczanie wszystkich wielkości po scałkowanych po tarczy gwiazdy można sprowadzić do całek zawierających wielomiany Legendra i wyrażenie na pociemnienie brzegowe.

7.2 Amplituda prędkości radialnej

Lokalna prędkość ku obserwatorowi dana jest wzorem:

$$v_O = v_r \cos \theta' - v_{\theta'} \sin \theta'.$$

Z użyciem (7.2), (7.3) i (7.7) dostajemy

$$v_O = |\epsilon| \omega R \sin(\psi_\epsilon - \omega t) \sum_{m'=-\ell}^{\ell} d_{mm'}^\ell N_\ell^{|m|} \left(\cos \theta' P_\ell^{|m|} - \alpha_H \sin \theta' \frac{dP_\ell^{|m|}}{d\theta'} \right) \quad (7.9),$$

gdzie ψ_ϵ oznacza fazę ϵ , $N_\ell^{|m|}$ czynnik normalizujący sferyczne harmoniki (rów.1.4), a $P_\ell^{|m|}$ stowarzyszoną funkcję Legendra. Całkując przyczynki z różnych części tarczy musimy uwzględnić znormalizowany czynnik pociemnienia brzegowego, $h_\lambda(\mu)$, dla rozważanej linii widmowej gdzie $\mu = \cos \theta'$, a λ jest długością fali. W modelu Eddingtona czynnik pociemnienia brzegowego wynosi $h = 1 + 1.5\mu$ i jest niezależny od długości fali. Prędkość radialna całego dysku gwiazdy jest więc dana przez

$$V_{\text{rad}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 v_O h_\lambda(\mu) \mu d\mu d\phi.$$

Po podstawieniu tu (7.9), skorzystaniu ze znanych wzorów

$$\mu P_\ell = \frac{(\ell+1)P_{\ell+1} + \ell P_{\ell-1}}{2\ell+1},$$

$$(1-\mu^2) \frac{dP_\ell}{d\mu} = \ell(P_{\ell-1} - \mu P_\ell)$$

i scałkowaniu, dostajemy

$$V_{\text{rad}} = |\epsilon| \omega R N_\ell^{|m|} P_\ell^{|m|} (\cos \theta_O) (u_\ell + \alpha_H v_\ell) \sin(\psi_\epsilon - \omega t), \quad (7.10)$$

gdzie

$$u_\ell = \frac{(\ell+1)b_{\lambda,\ell+1} + \ell b_{\lambda,\ell-1}}{2\ell+1}, \quad (7.11)$$

$$v_\ell = \frac{\Lambda[(2\ell+3)(\ell-1)b_{\lambda,\ell-2} + (2\ell+1)b_{\lambda,\ell} - (2\ell-1)(\ell+2)b_{\lambda,\ell+2}]}{(4\Lambda-3)(2\ell+1)}, \quad (7.12)$$

$$\Lambda \equiv \ell(\ell+1),$$

$$b_{\lambda,\ell} = \int_0^1 h_\lambda P_\ell \mu d\mu. \quad (7.13)$$

Zależność od aspektu opisuje funkcja $P_\ell^{|m|}(\cos \theta_O)$. Przy obserwacji z kierunków odpowiadających zerom tej funkcji obserwator nie widzi zmian prędkości radialnej. Na przykład z płaszyzny równikowej pomiary zmian prędkości radialnej nie wykryją modów odpowiadających nieparzystym wartościom $\ell + |m|$.

Efekt uśredniania opisują funkcje u_ℓ i v_ℓ , które zostały wyrażone przez $b_{\lambda,\ell}$. Ta wielkość opisuje również efekt uśredniania zmian jasności. Jej zachowanie w funkcji ℓ będzie omówione w rozdziale 7.4.

7.3 Zmiany jasności

Zaburzenie monochromatycznego strumienia gwiazdy w kierunku do obserwatora dana jest przez

$$\delta L_\lambda = R^2 \int_0^1 \left[\delta F_\lambda + F_\lambda \left(\frac{\delta h_\lambda}{h_\lambda} + \frac{\delta S}{S} \right) \right] h_\lambda(\mu') \mu' d\mu' d\phi', \quad (7.14)$$

gdzie F_λ oznacza normalną składową strumienia monochromatycznego,

$$\frac{\delta S}{S} = 2 \frac{\delta R}{R} + \frac{\sin \theta'}{\mu' R} \frac{\partial \delta R}{\partial \theta'} \quad (7.15)$$

jest względnym zaburzeniem elementu powierzchni dysku, a h_λ i δh_λ oznaczają, odpowiednio, znormalizowane pociemnienie brzegowe i jego zaburzenie.

Zacznijmy od zmiany jasności bolometrycznej w modelu Eddingtona. Mamy wtedy

$$\delta F_{\text{bol}} = \delta F_n \quad (7.16)$$

z δF_n danym przez (7.5). W tym modelu zmiana współczynnika pociemnienia brzegowego wyłącznie wynika wyłącznie ze zmiany kąta między normalną do powierzchni a kierunkiem do obserwatora, mamy zatem

$$\delta h = \frac{dh}{d\mu} \frac{\sin \theta'}{R} \frac{\partial \delta R}{\partial \theta'}.$$

Pohodną $h(\mu)$ eliminujemy całkowaniem przez części i, po skorzystaniu z (1.2), dostajemy

$$\delta L_{\text{bol}} = |\epsilon| L_{\text{bol}} N_\ell^{|m|} P_\ell^{|m|} (\cos \theta_O) b_{E,\ell} [|f| \cos(\psi_\epsilon + \psi_f - \omega t) - (\ell - 1)(\ell + 2) \cos(\psi_\epsilon - \omega t)], \quad (7.17)$$

gdzie

$$b_{E,\ell} = \int_0^1 (1 + 1.5\mu) P_\ell \mu d\mu. \quad (7.18)$$

Do interpretacji amplitud i faz z fotometrii wielobarwnej korzysta się z realistycznych modeli atmosfer gwiazdowych. Na podstawie stabilizowanych wyników modelowania wyliczamy numerycznie potrzebne nam pochodne logarytmiczne F_λ i h_λ po T_{eff} i g_{eff} . Wskaźnik λ reprezentuje tu pasmo. Zmiana efektywnej grawitacji w czasie oscylacji dana jest przez

$$\frac{\delta g_{\text{eff}}}{g_{\text{eff}}} = -(3\sigma^2 + 2) \frac{\delta R}{R} \quad (7.19)$$

W sposób podobny jak przypadku równania (7.17) dostaje się teraz

$$\begin{aligned} \delta L_\lambda = & |\epsilon| L_\lambda N_\ell^{|m|} P_\ell^{|m|} (\cos \theta_O) b_{\lambda,\ell} \{ \alpha_{T,\lambda} |f| \cos(\psi_f + \psi_\epsilon - \omega t) \\ & - [\alpha_{g,\lambda} (3\sigma^2 + 2) + (\ell - 1)(\ell + 2)] \cos(\psi_\epsilon - \omega t) \}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

gdzie

$$\alpha_{T,\lambda} = \frac{1}{4} \frac{\partial \log(F_\lambda | b_{\lambda,\ell}|)}{\partial \log T_{\text{eff}}}, \quad \alpha_{g,\lambda} = \frac{\partial \log(F_\lambda | b_{\lambda,\ell}|)}{\partial \log g_{\text{eff}}}.$$

7.4 Efekt uśredniania

Wyrażenia na $b_{E,\ell}$ i $b_{\lambda,\ell}$, jeżeli $h_\lambda(\mu)$ dane jest w formie szeregu potęgowego, sprowadzają się do całek oznaczonych

$$J_{\ell,k} = \int_0^1 \mu^k P_\ell d\mu,$$

na które mamy wzory. Całki znikają dla $\ell > k$ jeśli różnica $\ell - k$ jest parzysta. Jeśli jest nieparzysta to dla $\ell \rightarrow \infty$

$$J_{\ell,k} \rightarrow (-1)^{(\ell-k-1)/2} k! \ell^{-(k+3/2)} \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Dlatego zachowanie b dla dużych wartości ℓ zależy silnie od parzystości.

$$\text{Dla } \ell \rightarrow \infty \quad b_{E,\ell} \rightarrow \begin{cases} (-1)^{\frac{\ell-2}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi \ell^3}} & \text{if } \ell \text{ is even} \\ (-1)^{\frac{\ell-3}{2}} 1.5 \sqrt{\frac{2}{\pi \ell^3}} & \text{if } \ell \text{ is odd,} \end{cases} \quad (7.21)$$

W tabeli 5 podane są wartości $b_{E,\ell}$ i odpowiednie wartości współczynników u_ℓ i v_ℓ w wyrażeniu na (7.10) na V_{rad} . W ostatniej kolumnie podany jest wyraz $c_\ell = (\ell-1)(\ell+2)b_{E,\ell}$, odpowiedzialny za geometryczny wkład do zmian jasności.

Tablica 5: Współczynniki opisujące efekt uśredniania z eddingtonowskim pociemnieniem brzegowym

ℓ	$b_{E,\ell}$	u_ℓ	v_ℓ	$(\ell-1)(\ell+2)b_{E,\ell}$
0	1	0.708	0	-2
1	0.708	0.550	0.450	0
2	0.325	0.321	0.775	1.3
3	0.0626	0.127	0.594	0.626
4	-0.0208	0.0234	0.156	-0.374
5	-0.00782	-0.00521	-0.0117	-0.219
6	0.00781	-0.00234	-0.0319	0.312
7	0.00234	0.00156	0.0437	0.126
8	-0.00391	0.00059	0.0141	-0.274

Zmiany jasności przy niskich wartościach ℓ wynikają przede wszystkim ze zmian temperatury ($f \gg 1$). Wtedy efekt uśredniania w zmianach jasności opisuje czynnik $b_{E,\ell}$. Jego szybkie malenie sprawia, że jako założenie wyjściowe przy identyfikacji modów przyjmuje się przeważnie $\ell \leq 2$. Rola czynnika geometrycznego wzrasta z ℓ . Na przykład dla typowych częstotliwości modów wzbudzanych w gwiazdach δ Scuti i β Cephei efekty odkształcania gwiazdy zaczynają dominować przy $\ell = 5-7$. Wtedy, jak wynika z (7.21) dla

ℓ parzystych czynnik redukcji amplitudy maleje $\propto \ell^{-1/2}$, a więc wolno. Na rysunku 25 pokazane jest zachowanie czynnika uśredniania dla różnych pasm fotometrycznych.

7.5 Wartości ℓ z fotometrii wielopasmowej

Z obserwacji, oprócz częstotliwości, mamy dane o amplitudach, A_λ i fazach, ϕ_λ , często w wielu pasmach. Dane te można wykorzystać do wyznaczenia stopnia modu. Ze wzoru 7.20 wynika, że stosunki amplitud i różnice faz nie zależą ani od aspektu, θ_O , ani też od amplitudy ϵ modu. Najłatwiej zobaczyć przepisując ten wzór do postaci zespolonej. Przy okazji, przechodzimy do od względnych zmian strumienia do zmian wielkości gwiazdowej (czynnik -1.086).

$$\mathcal{A}_\lambda \equiv A_\lambda \exp \phi_\lambda = 1.086 \tilde{\epsilon} (\mathcal{E}_\ell^\lambda - \mathcal{D}_\ell^\lambda f), \quad (7.22)$$

gdzie oznaczyliśmy

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon N_\ell^{|m|} P_\ell^{|m|} (\cos \theta_O),$$

$$\mathcal{D}_\ell^\lambda = \alpha_{T,\lambda} b_{\lambda,\ell}$$

i

$$\mathcal{E}_\ell^\lambda = \alpha_{g,\lambda} (3\sigma^2 + 2) + (\ell - 1)(\ell + 2).$$

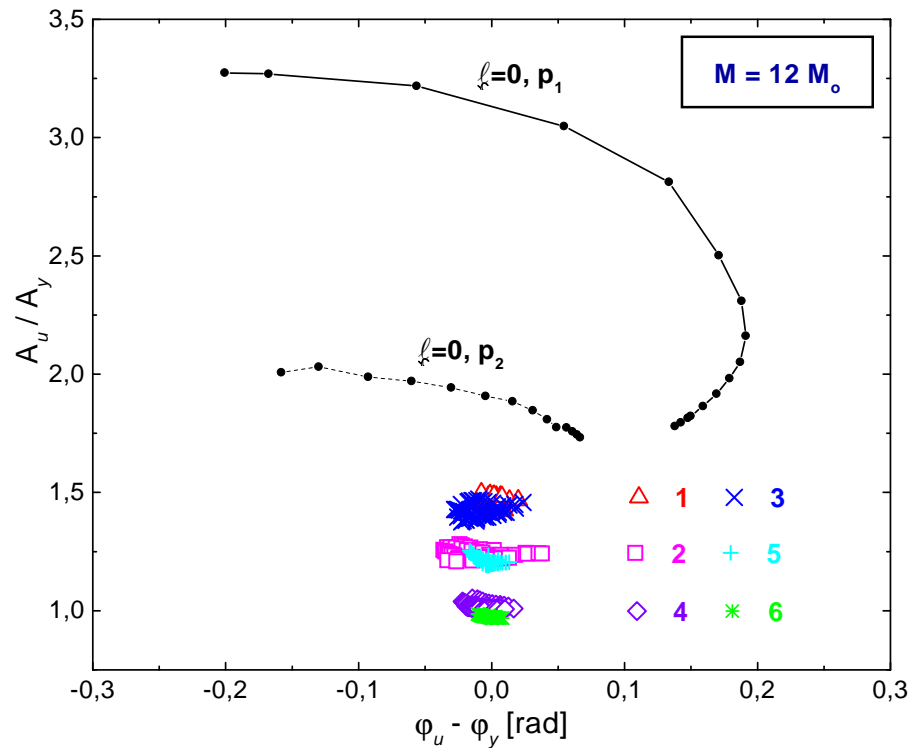
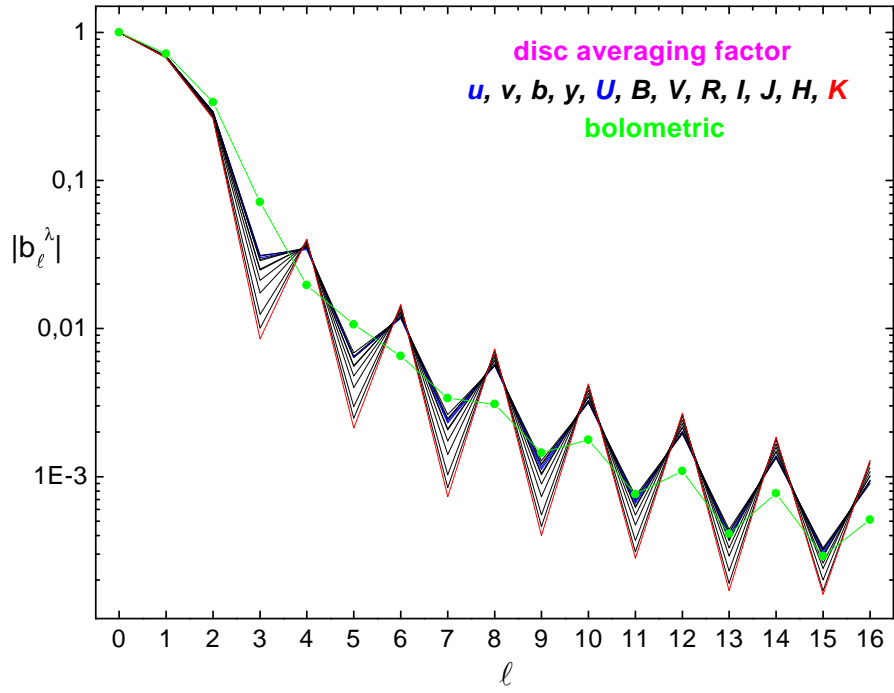
Przykład pokazany na rysunku 25 odnosi się do identyfikacji modów w gwiazdach typu β Cephei. Dla gwiazd tego typu wartość ℓ może być wyznaczona z obserwacji, bez dokładnej wiedzy o parametrach gwiazdy i wartości f . Domeny modów $\ell = 0, 1$ i 2 są dobrze rozdzielone, a wartości $\ell > 2$ bardzo mało prawdopodobne, ze względu na bardzo małe wartości $|b_{\lambda,\ell}|$ (patrz górna część rysunku). Widzimy też, że domena modów $\ell = 0$ jest rozległa. Zatem, przy takiej identyfikacji, mierzone stosunki amplitud i różnice faz mogą być wykorzystane do wyznaczenia radialnego stopnia modu i uzyskania ograniczeń na parametry gwiazd. Sytuacja jest inna w przypadku gwiazd typu δ Scuti. Domeny wszystkich modów niskich stopni są większe i większa jest też niepewność wyliczanych wartości f .

Zauważmy, że wartości f mogą być wyznaczone obserwacyjnie jeżeli mamy pomiary fotometryczne w co najmniej trzech pasmach. Przy zadanych parametrach gwiazdy (chodzi głównie o T_{eff}) i hipotetycznej wartości ℓ , możemy traktować układ równań 7.22 dla kilku pasm jako układ równań liniowych równań obserwacyjnych na $\tilde{\epsilon}$ i $f\tilde{\epsilon}$. Możemy rozwiązać ten układ metodą najmniejszych kwadratów. Zachowanie χ^2 w funkcji ℓ i T_{eff} , powie nam czy dyskryminacja ℓ i uzyskanie ograniczeń na parametry gwiazdy jest możliwa. Wartości f też są interesujące. Dają nam nowe ograniczenia na model gwiazdy.

Dysponując danymi o zmianach prędkości radialnej, do równań 7.22 można dołączyć warunek, wynikający z (7.10)

$$\mathcal{A}_{\text{vrad}} = -i\omega R(u_\ell + \alpha_H v_\ell) \tilde{\epsilon}, \quad (7.22)$$

co bywa konieczne dla uzyskania wartościowego rozwiązania.



Rysunek 25: (górn) Czynniki uśredniania w funkcji ℓ dla różnych pasm fotometrii Johnsona i Strömgrena. Porównanie z wartością dla strumienia bolometrycznego. (dół) Teoretyczny diagram różnica faz - stosunek amplitud dla dwóch pasm Strömgrena. Wartości wyliczone dla modów niestabilnych w ciągu modeli gwiazd o masie $12M_{\odot}$ w fazie palenia wodoru w jądrze. Dla mas w przedziale $9 \div 12M_{\odot}$ wykresy wyglądają podobnie.